بسمه تعالی

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی (ترم دوم ۷۸-۷۷)

مدت دو ساعت **موفق باشید**

سوال یک. معادله‌ی زیر با شرایط داده شده را حل کنید

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$
$$u(r,0) = u(r,\pi) = 0 \ , \quad 1 \le r \le b$$
$$u(1,\theta) = 0 \ , \quad u(b,\theta) = 1 \ , \quad 0 \le \theta \le \pi$$

سوال دو. جواب معادله زیر با شرایط مرزی داده شده را حل کنید

$$u_t = c^2 u_{xx} + h(x,t)$$
$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \ , \quad t \ge 0$$
$$u(x,0) = f(x) \ , \quad 0 \le x \le L$$

سوال سه. به کمک انتگرال فوریه‌ی تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

مقدار انتگرال ناسره‌ی زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\, dx$$

بسمه تعالی

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی (ترم دوم ۷۸-۷۷)

مدت دو ساعت   **(هر سوال ۲۵ نمره دارد)**   **موفق باشید**

سوال یک. (الف) سری فوریه مثلثاتی تابع زیر را بیابید

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \le -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} < x \le 0 \\ 0 & 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

(ب) با استفاده از (الف) مقدار سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ را محاسبه کنید.

سوال دو. جواب مساله‌ی زیر را بیابید.

$$\begin{aligned} & u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad , \quad 0 < x < a \ , \ y > 0 \\ & u(x,0) = 0 \quad , \quad 0 \le x \le a \\ & u(0,y) = 0 \\ & u(a,y) = \begin{cases} 1 - y & 0 < y < 1 \\ 0 & y \ge 1 \end{cases} \end{aligned}$$

سوال سه.

جواب معادله‌ی لاپلاس زیر با شرایط مرزی داده شده را بیابید.

$$\begin{aligned} & u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 \quad , \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \ , \ r > 1 \\ & u_\theta(r,0) = 0 \quad , \quad r \ge 1 \\ & u_\theta(r,\frac{\pi}{4}) = 0 \quad , \quad r \ge 1 \\ & u(1,\theta) = f(\theta) \quad , \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

u کراندار

سوال چهار. معادله‌ی زیر با شرایط داده شده را حل کنید

$$\begin{aligned} & u_{tt} = 4u_{xx} + xt \qquad 0 < x < \pi \ , \ t > 0 \\ & u(0,t) = 0 \ , \ t \ge 0 \\ & u(\pi,t) = 0 \ , \ t \ge 0 \\ & u(x,0) = x \quad , \quad 0 \le x \le \pi \\ & u_t(x,0) = 0 \quad , \quad 0 \le x \le \pi \end{aligned}$$

بسمه تعالی

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی (ترم دوم ۸۱-۸۰)

مدت دو ساعت **(هر سوال ۲۵ نمره دارد)** **موفق باشید**

سوال یک. بسط فوریه‌ی کسینوسی تابع $f(x) = x$، $0 < x < \pi$ را بیابید و با استفاده از آن سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ را محاسبه کنید.

سوال دو. با استفاده از انتگرال فوریه‌ی مناسب نشان دهید:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha + \alpha\sin\alpha - 1}{\alpha^2} \cos\alpha x \, d\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x & 0 \le x < 1 \\ \frac{\pi}{2} & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

سوال سه. جواب معادله‌ی موج زیر با شرایط مرزی داده شده را بیابید.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad 0 < x < \pi \ , \ t > 0$$
$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \ , \ t \ge 0$$
$$u(x,0) = f(x) \ , \quad 0 \le x \le \pi$$
$$u_t(x,0) = g(x) \ , \quad 0 \le x \le \pi$$

سوال چهار. معادله‌ی لاپلاس زیر با شرایط مرزی داده شده را حل کنید.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad , \quad -\infty < x < +\infty \ , \ 0 < y < b$$
$$u(x,0) = 0$$
$$u(x,b) = f(x)$$

بسمه تعالی

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی (ترم دوم ۷۸-۷۹)

مدت دو ساعت **موفق باشید**

سوال یک. (الف) بسط فوریه $f(x) = \sinh x$ را در $(-\pi, \pi)$ بیابید.

(ب) مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$ را بیابید.

(۲۵ نمره)

سوال دو. ثابت کنید

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha + \alpha\sin\alpha - 1}{\alpha^2} \cos\alpha x \, d\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x & 0 \le x < 1 \\ \frac{\pi}{2} & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

(۲۵ نمره)

سوال سه. مساله با شرایط مرزی زیر را حل کنید

$$u_{xx} + u_{yy} = F(x) + G(y) \quad , \quad 0 < x < a \; , \; 0 < y < b$$
$$u(x, 0) = f_1(x) \quad , \quad u(x, b) = f_2(x) \quad , \quad 0 < x < a$$
$$u(0, y) = g_1(y) \quad , \quad u(a, y) = g_2(y) \quad , \quad 0 < y < b$$

(۲۵ نمره)

سوال چهار. مساله زیر را حل کنید

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad 0 < x < L \; , \; t > 0$$
$$u_x(0, t) = 0 \quad , \quad u_x(L, t) = 0$$
$$u(x, 0) = f(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

(۲۵ نمره)

بسمه تعالی

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی (ترم دوم ۷۷-۷۸)

مدت دو ساعت **موفق باشید**

سوال یک. معادله با مشتق جزیی $xu_x + yu_y = u$ را با تبدیل $r = y/x$ و $s = y$ حل کنید.
(۱۵ نمره)

سوال دو. تابع $f(x) = \sin x$ مفروض است. (الف) بسط فوریه (نیم دامنه) سینوسی f را در $(0, \pi)$ بیابید.
(ب) بسط فوریه مثلثاتی f را در $(0, \pi)$ بیابید.
(ج) با استفاده از (ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 - 4n^2}$ را محاسبه کنید.
(۲۰ نمره)

سوال سه. مساله با شرایط مرزی زیر را حل کنید

$$u_{xx} + u_{yy} = \sin x + \cos y \quad , \quad -\pi < x < \pi \ , \ -\pi < y < \pi$$
$$u(x, -\pi) = -\cos x \ , \quad u(x, \pi) = -\sin x \ , \quad -\pi < x < \pi$$
$$u(-\pi, y) = -1 \ , \quad u(\pi, y) = 1 \ , \quad -\pi < y < \pi$$

(۲۵ نمره)

سوال چهار. با استفاده از تبدیل فوریه معادله‌ی زیر را حل کنید.
(۲۰ نمره)

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \ , \ t > 0$$
$$u(x, t) = f(x) \ , \quad u_t(x, 0) = 0$$

بسمه تعالی

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی (ترم اول ۸۱-۸۰)

مدت دو ساعت **موفق باشید**

سوال یک. (الف) سری فوریه
(۱۷ نمره)

$$f(x)=\begin{cases} x & -\pi<x<0 \\ 1 & 0<x<\pi \end{cases}$$

را بیابید و همگرایی آنرا مشخص کنید.
(ب) با استفاده از (الف) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ را بیابید.
(۳۰ نمره)

سوال دو. (الف) فرمول تبدیل فوریه‌ی $f(x)$ را بنویسید و تبدیل فوریه‌ی $e^{-a|x|}$ را بیابید. (a عدد مثبت ثابت).
(۱۳ نمره)
(ب) با استفاده از (الف) تبدیل فوریه‌ی $x^2e^{-a|x|}$ را بیابید.
(۷ نمره)

سوال سه. معادله‌ی گرمای زیر را حل کنید. (با ارائه‌ی کلیه‌ی جزئیات)
(۳۰ نمره)

$$\begin{aligned} &u_t=a^2u_{xx}-x \quad , \quad 0<x<\ell \\ &u(0,t)=u(\ell,t)=2 \quad , \quad t>0 \\ &u(x,0)=\sin x+\frac{1}{6a^2}x^3+\frac{1}{6a^2}\ell^2x-2 \quad , \quad 0<x<\ell \end{aligned}$$

سوال چهار. مطلوبست حل معادله‌ی موج نیمه متناهی
(۳۰ نمره)

$$\begin{aligned} &u_{tt}=a^2u_{xx} \qquad x>0,\ t>0 \\ &u_x(0,t)=0 \qquad t>0 \\ &u(x,0)=f(x) \qquad x>0 \\ &u(x,0)=g(x) \qquad x>0 \end{aligned}$$

که در آن

$$f(x)=g(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<\pi \\ 0 & x\geq\pi \end{cases}$$

بسمه تعالی

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی

وقت: دو ساعت **۸۱/۸/۲۷** **موفق باشید**

سوال یک. الف) سری فوریه‌ی تابع $F(x) = |\sin x|$ را بدست آورید.
(ب) با استفاده از قسمت (الف) مقدار سری عددی زیر را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4n^2)^2}$$

سوال دو. مطلوبست حل معادله‌ی گرمای زیر:

$$u_t = 4u_{xx} \quad , \qquad -\infty < x < +\infty$$
$$u(x,0) = \begin{cases} 1-|x| & |x| \le 1 \\ 0 & |x| \ge 1 \end{cases}$$

u کراندار وقتی $x \to \pm\infty$.

سوال سه. معادله‌ی لاپلاس زیر را در مختصات قطبی حل کنید

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$
$$u(r,0) = 0 \qquad 0 < \theta < \pi$$
$$u(r,\pi) = 0 \qquad 0 < r < 1$$
$$u(1,\theta) = F(\theta)$$

u کراندار وقتی $r \longrightarrow 0^+$

سوال چهار. مطلوبست حل معادله‌ی زیر:

$$u_{tt} - u_{xx} + 1 = 0$$
$$u(0,t) = 0$$
$$u_x(\pi,t) = -\pi$$
$$u(x,0) = \frac{x^2}{2}$$
$$u_t(x,0) = 0$$

(بارم سوالات یکسان است)

بسمه تعالی

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی

وقت: ۱۰۰ دقیقه **۸۲/۹/۶** **موفق باشید**

سوال یک. (الف) سری فوریه تابع زیر را بدست آورید. (۱۰ نمره)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ \dfrac{x}{2} & 0 < x < \pi \end{cases}$$

(ب) با استفاده از (الف) مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ را محاسبه کنید.

سوال دو. معادله‌ی زیر را حل کنید. (۱۲ نمره)

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin x \qquad 0 < x < \pi \ , \ t > 0$$

$$u(x,0) = 1 \quad , \quad u_t(x,0) = 0 \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0,t) = 1 \quad , \quad u(\pi,t) = 1 \quad t > 0$$

سوال سه. معادله‌ی حرارت زیر را حل کنید. (۱۸ نمره)

$$u_t - u_{xx} = x\cos t \qquad 0 < x < \pi \ , \ t > 0$$

$$u(x,0) = \sin x$$

$$u(0,t) = t^2$$

$$u(\pi,t) = 2t$$

بسمه تعالی

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی

مدت امتحان ۲ ساعت **۱۳۸۳/۲/۶** **موفق باشید**

---

۱. تابع $f(x) = x^۲$ را در فاصله‌ی $(-\pi, \pi)$ در نظر بگیرید: (۱۵ نمره)

الف) بسط فوریه ی مثلثاتی f را بدست آورید.

ب) جمع سری نامتناهی زیر را بیابید.

$$S = ۱ - \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} - \cdots + \frac{(-۱)^{n+۱}}{n^۲} + \cdots$$

---

۲. جواب معادله‌ی لاپلاس $u_{xx} + u_{yy} = ۰$ در مستطیل $a \le x \le ۰$، $b \le y \le ۰$ را شرایط مرزی زیر بدست آورید. (۲۰ نمره)

$$u_x(۰, y) = ۰ \quad , \quad u_x(a, y) = f(y), \quad ۰ \le y \le b$$
$$u_y(x, ۰) = ۰ \quad , \quad u_y(x, b) = ۰, \quad ۰ \le x \le a$$

---

۳. تابع کراندار $u(x, t)$ با شرط $\lim_{x\to\infty} u_x(x, t) = \lim_{x\to\infty} u(x, t) = ۰$ را چنان بیابید که در معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر با شرایط مرزی داده شده صدق کند. (۲۰ نمره)

$$u_t - u_{xx} = ۰ \quad , \quad u(x, ۰) = f(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad t > ۰$$

---

۴. مساله با مقدار مرزی زیر را ابتدا به یک مساله‌ی همگن تبدیل کنید و سپس با حل مسئله‌ی همگن جواب $u = u(x, t)$ را بیابید. (۲۵ نمره)

$$u_{tt} = u_{xx} + \sinh x \quad , \quad t > ۰ \quad , \quad ۰ \le x \le ۳$$
$$u(۰, t) = u(۳, t) = ۰ \quad , \quad u(x, ۰) = u_t(x, ۰) = \left(\frac{\sinh ۳}{۳}\right) x$$

بسمه تعالی

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی

وقت: ۱۲۰ دقیقه | **آذر ماه ۸۴** | **موفق باشید**

۱- تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ 2-x & 1\le x\le 2\end{cases}$ و برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f(x+2)=f(x)$، مفروض است. سری فوریه‌ی این تابع را بدست آورید.

(۲۵ نمره)

۲- معادله دیفرانسیل جزیی زیر مفروض است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}+u \quad 0<x<1,\ \ t>0 \qquad (1)$$

الف) با فرض اینکه $u(x,t)=e^{\alpha t}w(x,t)$، با تعیین مناسب α مناسب، معادله‌ی فوق را تبدیل به یک معادله‌ی حرارت بر حسب w نمایید.

ب) مطلوبست تعیین جوابی از معادله‌ی (۱) صادق در شرایط مرزی-اولیه‌ی زیر

$$\begin{cases} u(0,t)=0\,, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t)=0 \quad t>0 \\ \\ u(x,0)=x^2, \ \ -0<x<1 \end{cases}$$

(۲۵ نمره)

۳- معادله‌ی $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ برای $x>0$ ، $t>0$ مفروض است. مطلوبست تعیین جوابی از معادله‌ی فوق صادق در شرایط اولیه‌ی $u(x,0)=x$، $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,0)=1$ و شرط مرزی $u(0,t)=0$ مقدار جواب را در نقطه ی $x=2$ و در زمانهای $t=1$ و $t=3$ بدست آورید.

(۲۰ نمره)

۴- مطلوبست حل معادله‌ی لاپلاس $u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$ برای $0<r<2$ و $0<\theta<\frac{\pi}{2}$، تحت شرایط مرزی $u(r,0)=u(r,\frac{\pi}{2})=0$ و $u(2,\theta)=(1-\cos 2\theta)\sin 2\theta$. (توجه کنید که تابع جواب $u=u(r,\theta)$ تابعی کراندار است.)

(۲۰ نمره)

بسمه تعالی

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی

مدت دو ساعت | **فروردین ۱۳۸۵** | **موفق باشید**

---

(۱) گیریم f تابعی با ضابطه‌ی زیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & \text{اگر} \quad |x| > ۱ \\ ۱ + ax & \text{اگر} \quad -۱ < x \leq ۰ \\ ۱ + bx & \text{اگر} \quad ۰ \leq x < ۱ \end{cases}$$

(الف) – بسط انتگرال فوریه f را به دست آورید. (۱۵ نمره)

(ب) – با استفاده از (الف) نشان دهید که: (۱۰ نمره)

$$\int_{۰}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{۲} dx = \frac{\pi}{۲}$$

---

(۲) مسئله با مقادیر مرزی زیر را حل کنید: (۲۵ نمره)

$$u_{xx} + u_{yy} = ۰ \qquad ۰ < x < \pi \,, ۰ < y < ۱$$

$$u(x, ۰) = u_y(x, ۱) = ۰ \qquad ۰ < x < \pi$$

$$u(۰, y) = ۰ \qquad ۰ < y < ۱$$

$$u(\pi, y) = ۳ \cos\left(\frac{۳\pi y}{۲}\right) \sinh\left(\frac{۳\pi^{۲}}{۲}\right) \qquad ۰ < y < ۱$$

---

(۳) مسئله معادله‌ی با مشتقات جزئی

$$u_{tt} - ۳u_{xx} = ۳e^{-۲x} \quad ۰ < t, \quad ۰ < x < ۱$$

همراه با شرایط

$$u(۰, t) = -\frac{۵}{۴} \qquad t > ۰$$

$$u(۱, t) = -\frac{۱}{۴}e^{-۲} - ۲ \qquad t > ۰$$

$$u(x, ۰) = -\frac{۱}{۴}e^{-۲x} \qquad ۰ < x < ۱$$

$$u_t(x, ۰) = x \qquad ۰ < x < ۱$$

مفروض است. ابتدا مسئله را به یک مسئله‌ی همگن تبدیل کرده و پس از حل مسئله‌ی همگن جواب مسئله‌ی اولیه را به طور کامل پیدا کنید. (۳۰ نمره)

بسمه تعالی

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی

مدت ۹۰ دقیقه **آذر ۸۵** **موفق باشید**

---

(۱) به یکی از دو سوال زیر پاسخ دهید: (۳۰ نمره)
(الف) – معادله با مشتقات جزیی

$$u_{xx} = u_t + (2x - 1)\sin 2t + 2\ ;\quad 0 \le x \le 1,\ t \ge 0$$

با توجه به شرایط زیر را بطور کامل حل کنید:

$$\begin{cases} u(0,t) = \sin^2 t, \quad u(1,t) = \cos^2 t\ , \quad t \ge 0 \\ u(x,0) = x^2 + x, \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

(ب) – انتگرال فوریه‌ی تابع

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x & |x| < \frac{\pi}{2} \\ \\ 0 & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

پیدا کنید و به کمک آن نشان دهید که:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 + \cos(\pi\omega)}{1 - \omega^2}\, d\omega = 0, \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\frac{\pi\omega}{2})}{1 - \omega^2}\, d\omega = 1$$

---

(۲) با انتخاب $W(x,t) = e^{2t}u(x,t)$ معادله‌ی

$$u_{tt} + 4u_t + 4u = 9u_{xx}\ ;\quad t \ge 0 \ \ -\infty < x < +\infty,$$

را با توجه به شرایط

$$\begin{cases} u(x,0) = e^x, \ \ -\infty < x < +\infty \\ u_t(x,0) = -4e^x, \ \ -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

به طور کامل حل کنید. (۲۰ نمره)

---

(۳) معادله‌ی با مشتقات جزئی

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \qquad r \ge 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

را با توجه به شرایط به طور کامل حل کنید:

$$u(1,\theta) = \begin{cases} \alpha & 0 < \theta < \pi \\ 0 & \pi \le \theta < \pi \end{cases}$$

که در آن α یک عدد ثابت ناصفر است، تابع u بر حسب θ متناوب و با تناوب 2π است ، و u تابعی کراندار است. (۲۰ نمره)

بسمه تعالی

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی

وقت: ۱۰۰ دقیقه **یکشنبه ۲۸ فروردین ۱۳۸۹** **موفق باشید**

سوال یک. (الف) سری فوریه تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{\pi}{2} & 0 < x \leq \pi \\ \\ \frac{3\pi}{2} - x & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

(ب) انتگرال فوریه‌ی تابع

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & |x| \leq \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$$

را بیابید. (۴۰ نمره)

سوال دو. جواب معادله‌ی مشتقات جزئی

$$\begin{cases} u_{xx} - (t+1)u_t = 0 & 0 \leq x \leq 1 \ , \ t \geq 1 \\ u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \\ u(x,1) = x \end{cases}$$

را بیابید (از روش جداسازی متغیرها استفاده کنید.) (۲۰ نمره)

سوال سه. مطلوب است حل معادله‌ی لاپلاس با شرایط داده شده‌ی زیر (۳۰ نمره)

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{xx} = -x\sin(y) + \pi\sin(y) \ , \ 0 \leq x \leq \pi \ , \ 0 \leq y \leq \pi \\ u_x(0,y) = \sin(y) \\ u(\pi,y) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u(x,\pi) = 0 \end{cases}$$

بنام خدا

امتحان ریاضی مهندسی (ترم دوم)۸۹-۸۸

وقت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

---

۱. سوال ۱. (الف) (ده نمره) سری فوریه کسینوسی تابع $f(x) = x^۲ - \pi x$، $\circ < x < \pi$ را بیابید و همگرایی آن را مشخص کنید.

(ب) (ده نمره) با استفاده از (الف) نشان دهید

$$\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{۱}{n^۴} = \frac{\pi^۴}{۹\circ}$$

(ج) (ده نمره) مقادیر و توابع ویژه‌ی مساله‌ی زیر را بیابید

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = \circ, & \circ < x < L \\ X'(\circ) = \circ \\ X'(L) = \circ \end{cases}$$

(د) (ده نمره) مساله‌ی مقدار مرزی زیر را حل کنید (تابع $f(x)$ همان تابع قسمت (الف) است).

$$\begin{cases} u_t = a^۲ u_{xx}, & \circ < x < \pi, \ \ t > \circ \\ u_x(\circ, t) = \circ \\ u_x(\pi, t) = \circ \\ u(x, \circ) = f(x) \end{cases}$$

---

۲. سوال ۲. (الف) (ده نمره) انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} x & |x| < ۱ \\ \circ & |x| \geq ۱ \end{cases}$ را بیابید و همگرایی آن را مشخص کنید.

(ب) (پنج نمره) با استفاده از (الف) نشان دهید

$$\int_{\circ}^{+\infty} \frac{۲\sin^۲\alpha - \alpha \sin ۲\alpha}{\alpha^۲}\, d\alpha = \frac{\pi}{۲}.$$

(ج) (پنج نمره) جواب‌های غیر بدیهی از مساله زیر را بیابید

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = \circ, & -\infty < x < +\infty \\ X(x) \text{ کراندار وقتی که } x \longrightarrow \pm\infty \end{cases}$$

(د) (ده نمره) جواب معادله لاپلاس با شرایط داده شده را بیابید (تابع $f(x)$ همان تابع قسمت (الف) است).

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \circ, & -\infty < x < +\infty, \ \ \circ < y < \pi \\ u(x,y) \text{ کراندار وقتی که } x \longrightarrow \pm\infty \\ u(x, \circ) = \circ \\ u(x, \pi) = f(x) \end{cases}$$

---

۳. سوال ۳. (سی نمره) معادله موج با شرایط داده شده زیر را حل کنید

$$\begin{cases} u_{tt} = a^۲ u_{xx} + t(x^۲ - \pi x) - ۲a^۲(t-۱), & \circ < x < \pi, \ \ t > \circ \\ u_x(\circ, t) = ۲\pi \\ u_x(\pi, t) = ۲\pi t \\ u(x, \circ) = -x^۲ + ۲\pi x \\ u_t(x, \circ) = x^۲ \end{cases}$$

راهنمایی: ۱ - می‌توانید از مساله‌ی ۱ (الف) و ۱ (ج) استفاده کنید.

۲ - جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + a^۲ y = cx$، عبارت است از

$$y(x) = c_۱ \cos ax + c_۲ \sin ax + \frac{c}{a^۲} x.$$

بسمه تعالی

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی (ترم دوم ۹۱)

وقت: دو ساعت **سوم اردیبهشت ۹۲** **موفق باشید**

سوال یک. (۲۰ نمره) به کمک سری فوریه‌ی مثلثاتی تابع

$$f(x) = \pi - |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

سری زیر را محاسبه کنید.

$$\frac{۱}{۳^۴} + \frac{۱}{۵^۴} + \frac{۱}{۷^۴} + \cdots$$

سوال دو. (۲۰ نمره) معادله‌ی گرمای نیمه‌متناهی زیر را حل کنید

$$u_t = ۴u_{xx}, \qquad x > ۰, \quad t > ۰$$
$$u(۰,t) = ۰$$
$$x \longrightarrow +\infty \ \text{کراندار وقتی}\ u(x,t)$$
$$u(x,۰) = \begin{cases} ۲ & ۰ < x < ۳ \\ ۰ & x \geq ۳ \end{cases}$$

سوال سه. (۲۰ نمره) معادله‌ی لاپلاس زیر را حل کنید

$$u_{rr} + \frac{۱}{r}u_r + \frac{۱}{r^۲}u_{\theta\theta} = ۰, \qquad ۰ < r < ۱, \quad ۰ < \theta < \pi$$
$$u_\theta(r,۰) = ۰$$
$$u(r,\pi) = ۰$$
$$u(۱,\theta) = \pi - \theta$$

سوال چهار. (۲۰ نمره) مساله‌ی زیر را به یک مساله‌ی همگن با شرایط مرزی همگن تبدیل کنید (حل مساله لازم نیست).

$$u_{tt} = a^۲u_{xx} + e^{-x}, \qquad ۰ < x < \pi, \quad t > ۰$$
$$u(۰,t) = t$$
$$u(\pi,t) = ۰$$
$$u(x,۰) = f(x)$$
$$u_t(x,۰) = g(x)$$

سوال پنج. (۲۰ نمره) با استفاده از روش دالامبر معادله‌ی موج نیمه‌متناهی زیر را حل کنید

$$u_{tt} = a^۲u_{xx}, \qquad x > ۰, \quad t > ۰$$
$$u_x(۰,t) = ۴e^t$$
$$u(x,۰) = e^{-x}$$
$$u_t(x,۰) = ۱$$

بنام خدا

مسایل انتخابی از چند امتحان ریاضی مهندسی در سالهای اخیر

---

۱) اگر $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ و اگر مقدار I را به کمک سری فوریه‌ی تابع $f(x) = |\sin x|$ روی $[-\pi, \pi]$ پیدا کنیم، آنگاه I برابر با چیست؟ چرا؟ (۸ نمره)

---

۲) فرض کنید $u(x,t)$ جواب مسئله‌ی
$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} & -\infty < x < +\infty, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = x & -\infty < x < +\infty \\ u_t(x,0) = x & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$
باشد و $I = u(1,1)$. در اینصورت I برابر با چیست؟ چرا؟ (۸ نمره)

---

۳) فرض کنید $F(\lambda) = 0$ معادله ای باشد که ریشه‌های آن مقادیر ویژه از مسئله‌ی اشتورم — لیوویل
$$\begin{cases} \phi''(x) + \lambda\phi(x) = 0 & 0 < x < 1 \\ \phi'(0) = 0 \\ \phi(1) + \phi'(1) = 0 \end{cases}$$
می باشد. در اینصورت $F(\lambda)$ برابر با چیست؟ چرا؟ (۸ نمره)

---

۴) به ازای چه تابع $G(x)$ تغییر متغیر $u(x,t) = w(x,t) + G(x)$ مسأله‌ی
$$\begin{cases} u_{xx} = u_t + x & 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(2,t) = 1 & t > 0 \\ u(x,0) = e^x & 0 < x < 2 \end{cases}$$
را به مساله‌ای همگن با شرایط مرزی همگن برحسب w تبدیل می کند؟ (۸ نمره)

---

۵) اگر $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{3}$ سری فوریه‌ی کسینوسی تابع هموار $f(x)$ روی $[0,3]$ باشد آنگاه مقدار $I = \int_0^3 (f(x))^2 \, dx$ بر حسب ضرائب فوریه کسینوسی تابع f چیست؟ (۸ نمره)

---

۶) اگر $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+1} \, dx$ ، آنگاه به کمک روش های تبدیل فوریه I را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

---

۷) مسئله‌ی با مقادیر مرزی زیر مفروض است:

$$P.D.E. \quad u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 \qquad 0 < \theta < \pi, \quad r > 2$$

$$B.C. \quad \begin{cases} u_\theta(r,0) = u_\theta(r,\pi) = 0 & r \geq 2 \\ u(2,\theta) = 1 + \cos 2\theta & 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

با استدلال کامل جواب این مسئله را پیدا کنید. (۲۰ نمره)

---

۸) مسئله‌ی غیر همگن زیر مفروض است:

$$P.D.E \quad u_{tt} = ۴u_{xx} - ۴xe^{-t} + \sin t \qquad ۰ < x < ۴, \quad t > ۰$$

$$B.C. \begin{cases} u_x(۰, t) = -۴e^{-t} \\ u(۴, t) = -۱۶e^{-t} - \sin t \end{cases} \qquad t \geq ۰$$

$$I.C. \begin{cases} u(x, ۰) = \cos\left(\frac{\pi}{۸}x\right) - ۴x \\ u_t(x, ۰) = ۴x - ۱ \end{cases} \qquad ۰ \leq x \leq ۴$$

(الف) نشان دهید که اگر u یک جواب برای این مسئله باشد، آنگاه تابع دو متغیره‌ی w با تعریف $w(x,t) = u(x,t) + ۴xe^{-t} + \sin t$ در معادله‌ی همگن $۴w_{xx} = w_{tt}$ صدق می کند.(۳ نمره)
(ب) به کمک تغییر متغیر قسمت (الف)، مسئله‌ی غیر همگن فوق را به یک مسئله‌ی همگن بر حسب w تبدیل و مسئله‌ی حاصل را بازنویسی کنید.(۲ نمره)
(ج) مسئله‌ی همگن بدست آمد در قسمت (ب) را به کمک روش جداسازی متغیرها و استفاده از سری های فوریه حل کنید و جواب مسئله‌ی همگن را در پیدا کنید.(۱۴ نمره)
(د) جواب مسئله‌ی غیر همگن را به کمک جواب بدست آمده در قسمت (ج) و تغییر متغیر قسمت (الف) پیدا کنید.(۱ نمره)

---

۹) (الف) تابع f با تعریف $f(x) = e^{-x}$ روی $[۰, +\infty)$ مفروض است. اگر $A(\lambda)$ ضریب انتگرال فوریه کسینوسی (تبدیل فوریه کسینوسی) f باشد آنگاه، به کمک تعریف انتگرالهای ناسره، $A(\lambda)$ را به طور کامل محاسبه کرده و نتیجه را در مستطیل زیر بنویسید. (۸ نمره)
(ب) به کمک انتگرالهای فوریه و با استفاده از جواب بدست آمده در قسمت (الف) جواب مسئله‌ی حرارت

$$P.D.E. \quad ۹u_{xx} = u_t \qquad ۰ < x < +\infty, \quad t > ۰$$

$$I.C. \quad u(x, ۰) = e^{-x} \qquad ۰ \leq x < +\infty$$

را با جزئیات کامل محاسبه نموده و نتیجه را به صورت یک انتگرال فوریه در مستطیل زیر بنویسید(نیازی به ساده کردن انتگرال حاصل نیست). (۱۲ نمره)

موفق باشید

دانشگاه صنعتی اصفهان — دانشکده علوم ریاضی

۸۷/۸/۳۰ امتحان میان ترم درس ریاضی مهندسی وقت: ۶۰ دقیقه

بخش اول—آزمون چهار گزینه‌ای **(سری الف)**

نام‌ونام‌خانوادگی: .... شمارهٔ دانشجویی: .... نام مدرس: ....

پاسخ صحیح سؤالات را در جدول زیر با علامت × مشخص نمایید.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
ج										
د										

---

۱) تابع ψ را چگونه در نظر بگیریم تا با قرار دادن $u(x,t) = w(x,t) + \psi(x)$ در معادله $u_t = ۴u_{xx} + \sin x$ همراه با شرایط $u_x(۰,t) = -۱$ ، $u(۰,t) = ۱$ ، و $u(x,۰) = f(x)$ به معادله‌ای همگن و شرایط همگن تبدیل شود.

الف) $\psi(x) = \frac{۱}{۴}\sin x - \frac{۵}{۴}x + ۱$ ب) $\psi(x) = -\frac{۱}{۴}\cos x - \frac{۳}{۴}x + ۱$

ج) $\psi(x) = -\frac{۱}{۴}\sin x - \frac{۳}{۴}x + ۱$ د) $\psi(x) = \frac{۱}{۴}\cos x - \frac{۵}{۴}x + ۱$

۲) برای معادله‌ی $u_t = c^۲u_{xx} - ۵u$ با فرض $u(x,t) = w(x,t)v(t)$ ، تابع v را کدامیک از توابع زیر انتخاب کنیم تا معادله به فرم $w_t = c^۲w_{xx}$ تبدیل شود؟

الف) $v = \sin ۵t$ ب) $v = \cos ۵t$ ج) $e^{-۵t}$ د) $e^{۵t}$

۳) می دانیم که انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} ۱ & |x| < ۱ \\ ۰ & |x| \geq ۱ \end{cases}$ به صورت $\int_۰^{+\infty} \frac{۲\sin\alpha\cos\alpha x}{\pi\alpha}\, d\alpha$ است. در اینصورت مقدار $\int_۰^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ برابر است با

الف) $\frac{\pi}{۸}$ ب) $\frac{\pi}{۴}$ ج) $\frac{\pi}{۲}$ د) π

۴) مقدار سری فوریه متناظر تابع متناوب f با تعریف

$$f(x) = \begin{cases} -۳ & -۲ \leq x < ۰ \\ ۵ & ۰ \leq x \leq ۲ \end{cases}$$
$$f(x+۴) = f(x)$$

در نقطه‌ی $x = ۰$ برابر است با

الف) π ب) ۱ ج) $\frac{۱}{۲}$ د) $\frac{\pi}{۲}$

۵) مقدار $u(۲,۱)$ برای جواب مسئله‌ی $u_{tt} - u_{xx} = ۰$، با شرایط $u(x,۰) = ۰$، $u_t(x,۰) = x^۲$ روی $-\infty < x < +\infty$ و $t \geq ۰$ کدام است؟

الف) ۳ ب) $\frac{۲}{۳}$ ج) $\frac{۸}{۳}$ د) $\frac{۱۳}{۳}$

٦) ضریب $a_٦$ برای سری فوریه کسینوسی تابع $f(x) = \frac{۵}{۲} + \cos^۲ ۳x$، $۰ < x < \pi$، چیست؟

الف) $-\frac{۳}{۲}$ ب) $\frac{۳}{۲}$ ج) $\frac{۱}{۲}$ د) $-\frac{۱}{۲}$

۷) مقادیر ویژه و توابع ویژه در مسئله $\begin{cases} y'' + \lambda y = ۰ \\ y'(۰) = ۰, \quad y(۱) = ۰ \end{cases}$ عبارتند از:

الف) $\lambda_n = (n-۱)^۲\pi^۲$، $y_n(x) = \cos(n-۱)\pi x$ ، $n = ۱,۲,۳,\cdots$

ب) $\lambda_n = \frac{۱}{۴}(۲n-۱)^۲\pi^۲$، $y_n(x) = \cos\frac{(۲n-۱)\pi}{۲}x$ ، $n = ۱,۲,۳,\cdots$

ج) $\lambda_n = \frac{۱}{۴}(۲n-۱)^۲\pi^۲$، $y_n(x) = \sin\frac{(۲n-۱)\pi}{۲}x$ ، $n = ۱,۲,۳,\cdots$

د) $\lambda_n = (n-۱)^۲\pi^۲$، $y_n(x) = \sin(n-۱)\pi x$ ، $n = ۱,۲,۳,\cdots$

۸) می دانیم که سری فوریه تابع $f(x) = x$ روی $-\pi < x < \pi$ برابر است با

$$۲\left(\frac{\sin x}{۱} - \frac{\sin ۲x}{۲} + \frac{\sin ۳x}{۳} - \cdots\right).$$

در این صورت $\int_۰^\pi x^۲ dx$ برابر است با

الف) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{۲\pi}{n^۲}$ ب) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{\pi}{n^۳}$ ج) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{(-۱)^n\pi}{n^۳}$ د) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{(-۱)^n ۲\pi}{n^۲}$

۹) تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x) = e^{-۳x}$ کدام است؟

الف) $\frac{۳}{۹+\lambda^۲}$ ب) $\frac{۱}{۹+\lambda^۲}$ ج) $\frac{\sqrt{۲}}{\pi}\frac{۱}{۹+\lambda^۲}$ د) $\sqrt{\frac{٦}{\pi}}\frac{۱}{۹+\lambda^۲}$

۱۰) برای مسئله‌ی اشتورم—لیوویل

$$\begin{cases} x^۲y'' + ۵xy' + \lambda y = ۰ & ۱ < x < e \\ y(۱) = y(e) = ۰ \end{cases}$$

کدام گزینه در مورد توابع ویژه‌ی حاصل از این مسئله درست است؟

الف) $\int_۱^e x\phi_n(x)\phi_m(x)\,dx = ۰,\ n \neq m$ ب) $\int_۱^e x^۲\phi_n(x)\phi_m(x)\,dx = ۰,\ n \neq m$

ج) $\int_۱^e x^۳\phi_n(x)\phi_m(x)\,dx = ۰,\ n \neq m$ د) $\int_۱^e \phi_n(x)\phi_m(x)\,dx = ۰,\ n \neq m$

موفق باشید

بنام خدا

امتحان درس ریاضی مهندسی (تابستان ۹۰، PDE)

---

۱. با تغییر متغیر $u(x,t) = e^{\delta t} w(x,t)$ و انتخاب یک δ مناسب می توان تابع u را در معادلات رسانش گرما(در صورت وجود) حذف کرد. از این تغییر متغیر برای پیدا کردن جواب مسأله‌ی زیر استفاده کنید.

$$\begin{array}{lll} P.D.E. & u_{xx} = u_t + 4u & 0 \le x \le 2, \quad t \ge 0 \\ B.C. & u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0 & t > 0, \\ I.C. & u(x,0) = x & 0 < x < 2, \end{array}$$

---

۲. مساله‌ی با مقادیر مرزی زیر

$$\begin{array}{lll} P.D.E. & r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0 & 0 < r \le a, \quad 0 \le \theta \le \pi \\ B.C. & u(r,0) = u(r,\pi) = 0 & 0 < r < a \\ I.C. & u(a,\theta) = f(\theta) & 0 < \theta < \pi \end{array}$$

را، که در آن f یک تابع قطعه‌ای پیوسته روی $[0,\pi]$ است و u روی دامنه‌ی تعریف خود کراندار است، حل کنید.

---

۳. اگر $a > 0$، آنگاه تبدیل فوریه تابع f با تعریف

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر} \quad |x| < a \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

را در صورت وجود پیدا کنید. $\mathcal{F}(0)$ برابر چیست؟ تابع f را بر حسب تبدیل فوریه معکوس بیان کنید.

موفق باشید

دانشگاه صنعتی اصفهان — دانشکده علوم ریاضی

۸۷ /۸/۳۰ | امتحان میان ترم درس ریاضی مهندسی | وقت :۶۰ دقیقه

بخش دوم — سوالات تشریحی

---

۱) مطلوب است حل مسئله زیر:

$$\begin{array}{ll} u_{xx}-u_t=6x-\sinh 2t & 0<x<1,\quad t>0 \\ u(0,t)=\cosh^2 t & t\geq 0 \\ u(1,t)=\sinh^2 t & t\geq 0 \\ u(x,0)=x^3+2 & 0<x<1 \end{array}$$

---

۲) جواب $u(x,t)$ از مسئله‌ی زیر را پیدا کنید:

$$\begin{array}{ll} u_t=u_{xx}+e^{-t}\sin 3\pi x & 0<x<1,\quad t>0 \\ u(0,t)=0 & t\geq 0 \\ u(1,t)=0 & t\geq 0 \\ u(x,0)=\sin \pi x & 0<x<1 \end{array}$$

موفق باشید

بنام خدا

آزمون میان ترم درس ریاضی مهندسی

---

۱) (الف) می‌دانیم که ضرائب سری فوریه‌ی تابع $f(x) = \begin{cases} -\pi & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$، برای $n \geq 1$ عبارتند از $a_n = \dfrac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}$، و $b_n = \dfrac{1 - 2(-1)^n}{n}$. با استفاده از این ضرائب و محاسبه‌ی a_0، ابتدا سری فوریه‌ی f را نوشته، سپس به‌کمک آن مقدار سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ را محاسبه کنید.(۱۰ نمره)

(ب) می‌دانیم که ضریب سری فوریه‌ی سینوسی تابع $f(x) = \pi^2 x - x^3$ در بازه‌ی $(0, \pi)$ برای هر $n \geq 1$ برابر است با $b_n = \dfrac{12(-1)^{n+1}}{n^3}$. با استفاده از این واقعیت مقدار سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^6}$ را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

---

۲) الف) به‌کمک انتگرال فوریه جواب مسأله‌ی رسانش گرمای زیر را به‌دست آورده و آن را به‌صورت یک انتگرال بیان کنید:

$$\begin{aligned} &P.D.E\ : \quad u_t = u_{xx}, && 0 \leq x < \infty,\ \ t \geq 0 \\ &B.C.\ : \quad u_x(0,t) = 0, && t > 0 \\ &I.C.\ : \quad u(x,0) = f(x), && x > 0 \end{aligned}$$

که در آن تابع u در دامنه‌ی مورد بحث کراندار است و f روی $(0, \infty)$ تابعی است قطعه‌ای هموار و مطلقاً انتگرال‌پذیر. (۱۲ نمره)

ب) تبدیل فوریه‌ی تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$، که در آن $a > 0$، را محاسبه کنید. (۸ نمره)

---

۳) (الف)توابع ویژه و مقادیر ویژه‌ی مسأله‌ی اشتورم—لیوویل زیر را به‌دست آورید.(۱۰ نمره)

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ \varphi'(0) = 0 \\ \varphi(1) + \varphi'(1) = 0 \end{cases}$$

(ب) بدون استناد به خواص یک مسأله‌ی اشتورم—لیوویل، مستقیماً ثابت کنید که توابع ویژه‌ی نظیر مقادیر ویژه‌ی متمایز در مسأله‌ی فوق در بازه‌ی $[0, 1]$ متعامدند.(۱۰ نمره)

---

۴) مسأله‌ی دیریشله(لاپلاس) زیر را، که روی یک ربع دایره طرح شده و در آن u تابعی کراندار است، حل کنید:(۲۰ نمره)

$$P.D.E: \quad u_{rr}+\frac{۱}{r}u_r+\frac{۱}{r^{۲}}u_{\theta\theta}=۰, \quad ۰<r<۲, \quad ۰<\theta<\frac{\pi}{۲}$$

$$B.C.: \quad \begin{cases} u_\theta(r,۰)=۰, \\ u(r,\frac{\pi}{۲})=۰, \end{cases} \qquad ۰\leq r\leq ۲$$

$$B.C.: \quad u(۲,\theta)=\theta, \qquad ۰<\theta<\frac{\pi}{۲}$$

---

۵) مسأله‌ی موج ناهمگن زیر را حل کنید:(۲۰ نمره)

$$P.D.E: \quad u_{tt}=u_{xx}+t\cos ۲\pi x, \quad ۰<x<۱, \quad t>۰$$

$$B.C.: \quad \begin{cases} u_x(۰,t)=۰, \\ u_x(۱,t)=۰, \end{cases} \qquad t>۰$$

$$I.C.: \quad \begin{cases} u(x,۰)=۰, \\ u_t(x,۰)=\cos\pi x, \end{cases} \qquad t>۰$$

توجه: در حل این مسأله می‌توانید بدون حل مسأله‌ی اشتورم—لیوویل مشهور مربوط، از جوابهای شناخته شده‌ی آن استفاده کنید.

موفق باشید

بنام خدا

آزمون میان ترم درس ریاضی مهندسی

فروردین ۸۹ — مدت ۳ ساعت

---

۱) (الف) بسط فوریه کسینوسی $f(x) = x(\pi - x)$ را در بازه‌ی $[0, \pi]$ بدست آورید.(۱۰ نمره)

(ب) با استفاده از اتحاد پارسوال و قسمت (الف) نشان دهید:(۱۰ نمره)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

---

۲) (الف) روش دالامبر را برای مساله زیر با ذکر جزییات شرح دهید: (می توانید از فرمول دالامبر برای معادله‌ی فنر دو سر نامتناهی استفاده کنید.)(۱۲ نمره)

$$\begin{array}{ll} u_{tt} = 9u_{xx}, & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \geq 0, \\ u_t(x,0) = g(x), & x \geq 0, \\ u_x(0,t) = 0, & t \geq 0. \end{array}$$

(ب) هرگاه $f(x) = \cos x$ و $g(x) = e^x$، آنگاه جواب قسمت (الف) را به طور صریح پیدا کنید.(۵ نمره)

(ج) با استفاده از (ب) مقدار $u(2,3)$ را پیدا کنید.(۳ نمره)

---

۳) مساله‌ی دیریکله‌ی زیر را حل کنید:(۲۰ نمره)

$$\begin{array}{ll} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & 0 < \theta < \frac{\pi}{4},\ 1 < r < 2, \\ u(r,0) = 0,\ u(r,\frac{\pi}{4}) = f(r), & 1 \leq r \leq 2, \\ u(1,\theta) = u(2,\theta) = 0, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}. \end{array}$$

---

۴) (الف) مقادیر ویژه و توابع ویژه‌ی مساله‌ی اشتورم—لیوویل زیر را بدست آورید:(۱۰ نمره)

$$\begin{array}{ll} y'' + 4y' + (3 + \lambda)x = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ y(0) = y(\pi) = 0. & \end{array}$$

(ب) نشان دهید توابع ویژه این مساله نسبت به تابع وزنی مناسب در بازه‌ی $[0, \pi]$ متعامدند.(۱۰ نمره)

---

۵) جواب مساله‌ی با مقادیر اولیه مرزی زیر را بدست آورید:(۲۰ نمره)

$$\begin{array}{ll} u_t = u_{xx} + e^{-2t}\sin x + 2t, & 0 \leq x \leq \pi,\ t \geq 0, \\ u(x,0) = x - \frac{\pi}{2}, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = t^2 - \frac{\pi}{2},\ u(\pi,t) = t^2 + \frac{\pi}{2}, & t \geq 0. \end{array}$$

(توجه: در حل این مساله می توانید از مقادیر ویژه و توابع ویژه‌ی مسایل حل شده در کلاس، بدون آنکه آنها را ثابت کنید، استفاده نمایید.)

موفق باشید

بسمه تعالی

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی (ترم دوم ۹۲)

وقت: دو ساعت | **دوم اردیبهشت ۹۳** | **موفق باشید**

سوال یک. **(۲۰ نمره)** (الف) سری فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 0 & -2 < x < -1 \\ k & -1 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases}$ را بیابید (k یک عدد ثابت است). در هر نقطه از بازه‌ی $[-2, 2]$، سری فوریه به دست آمده به چه مقداری همگرا است؟

(ب) با استفاده از (الف) مقدار سری‌های زیر را محاسبه کنید

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \quad \text{و} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

سوال دو. **(۲۰ نمره)** (الف) انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x > 0 \end{cases}$ را بیابید و همگرایی آن‌را مشخص کنید.

(توجه: می‌توانید در این مساله از انتگرال‌های

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} \quad \text{و} \quad \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}(-b\cos bx + a \sin bx)}{a^2 + b^2}$$

استفاده کنید.)

(ب) با استفاده از (الف) انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x - \lambda \sin \lambda x}{1 + \lambda^2} \, d\lambda$$

سوال سه. **(۳۰ نمره)** معادله‌ی لاپلاس زیر را حل کنید

$$\begin{aligned} & u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, && 1 < r < e, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \\ & u(1, \theta) = 0 && 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3} \\ & u(e, \theta) = 0 && 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3} \\ & u(r, 0) = 0 && 1 \le r \le e \\ & u\left(r, \frac{\pi}{3}\right) = 1 && 1 \le r \le e \end{aligned}$$

سوال چهار. **(۳۰ نمره)** مساله‌ی غیر همگن زیر را حل کنید

$$\begin{aligned} & u_t = a^2 u_{xx} + t, && 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ & u(0, t) = 0 && t \ge 0 \\ & u(\pi, t) = 0 && t \ge 0 \\ & u(x, 0) = 1 && 0 \le x \le \pi \end{aligned}$$

(توجه: (۱) می‌توانید در این مساله از مقادیر و توابع ویژه مسائل حل شده در کلاس، بدون آن‌که آن‌را ثابت کنید استفاده نمایید.
(۲) اگر a یک عدد ثابت باشد، جواب معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول $y'(x) + ay(x) = q(x)$ عبارت است از $y(x) = e^{-ax} y(0) + \int_0^x e^{-a(x-\tau)} q(\tau) \, d\tau$.)
